التمرين الأول :(05نقط)

يبدأ لاعب لعبة تشمل عدة جولات متتابعة. احتمال أن يخسر في الجولة الأولى هو 0.2 .
تجري اللعبة في ما بعد بالطريقة التالية: إذا ربح في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو 0.05 وإذا خسر في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو 0.1. نسمي: E_i : الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة i " مع i عدد طبيعي غير معدوم و $p_i = p(E_i)$، نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يخسرفيها اللاعب خلال الجولات الثلاثة الأولى.

1) مثل هذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

2) أ) ما هي قيم X ؟
ب) بين أن $p(X=2)=0.031$.
ج) عين قانون احتمال X .
د) أحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X .

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $p_{n+1}=0.05p_n+0.05$.

4) (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.
أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب) استنتج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n ثم p_n بدلالة n.
ج) أحسب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

التمرين الثاني (04نقط)

عين الاجابة الصحيحة الوحيدة من بين الاجابات المقترحة مع التعليل

1) حلول المعادلة $24x+34y=2$ في Z^2 هي :
أ) $(17k-7;5-12k)$ مع $k\in Z$
ب) $(-7k;5k)$ مع $k\in Z$
ج) $(34k-7;5-24k)$ مع $k\in Z$
د) المجموعة الخالية

2) في مجموعة الاعداد الصحيحة Z، المعادلة : $x^2+x+3\equiv 0[5]$.
أ) لا تقبل حلولا
ب) حلولها زوجية
ج) حلولها تحقق : $x\equiv 2[5]$
د) حلولها تحقق : $x\equiv 1[5]$ أو $x\equiv 3[5]$.

3) عدد القواسم الطبيعية للعدد $(10)^{2018}$ هي :
أ) 4076361
ب) 4076365 .
ج) 2018
د) 2017 .

4) N عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الاساس 5 كمايلي $\overline{421}$.
يكتب N في النظام ذي الاساس 6 كما يلي :
أ) $\overline{303}$
ب) $\overline{421}$
ج) $\overline{111}$
د) $\overline{222}$

التمرين الثالث : (04نقط)

المستوى المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C ، H و J التي لواحقها على الترتيب $Z_A=-3-i$ ، $Z_B=-2+4i$ ، $Z_C=3-i$ ، $Z_H=-2$ و $Z_J=i$. الوحدة $2cm$.

1) علم النقط A ، B ، C ، H و J .

2) بين أن J هي مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC . عين نصف قطرها.انشئ الدائرة (γ)

3) أكتب على الشكل الجبري و الأسي العدد $\dfrac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$. ثم استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين.

فيما تبقى نقبل أن H هي نقطة ارتفاعات المثلث ABC

4) عين Z_G لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC . علم G

5) بين أن النقط G ، J ، H على استقامة واحدة.

6) لتكن A' و K منتصفا القطعتين $[BC]$ و $[AH]$.

أ) عين لاحقتي A' و K

ب) بين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع

التمرين الرابع : (07نقط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(x-1)e^x$.

1) أدرس تغيرات g .

2) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α حيث: $1.278<\alpha<1.279$ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+2-(x-2)e^x$.

نسمي (Cf) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) أحسب النهايات للدالة f عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

2) بين أن (Cf) له مستقيم مقارب (Δ) معادلة له: $y=x+2$ عند $-\infty$.

- أدرس وضعية (Cf) بالنسبة إلى (Δ)

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

4) بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) استنتج من الجزء I) إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (Cf)

6) عين النقطة A من (Cf) التي يكون عندها المماس (T) للمنحنى (Cf) موازيا للمستقيم (Δ) .

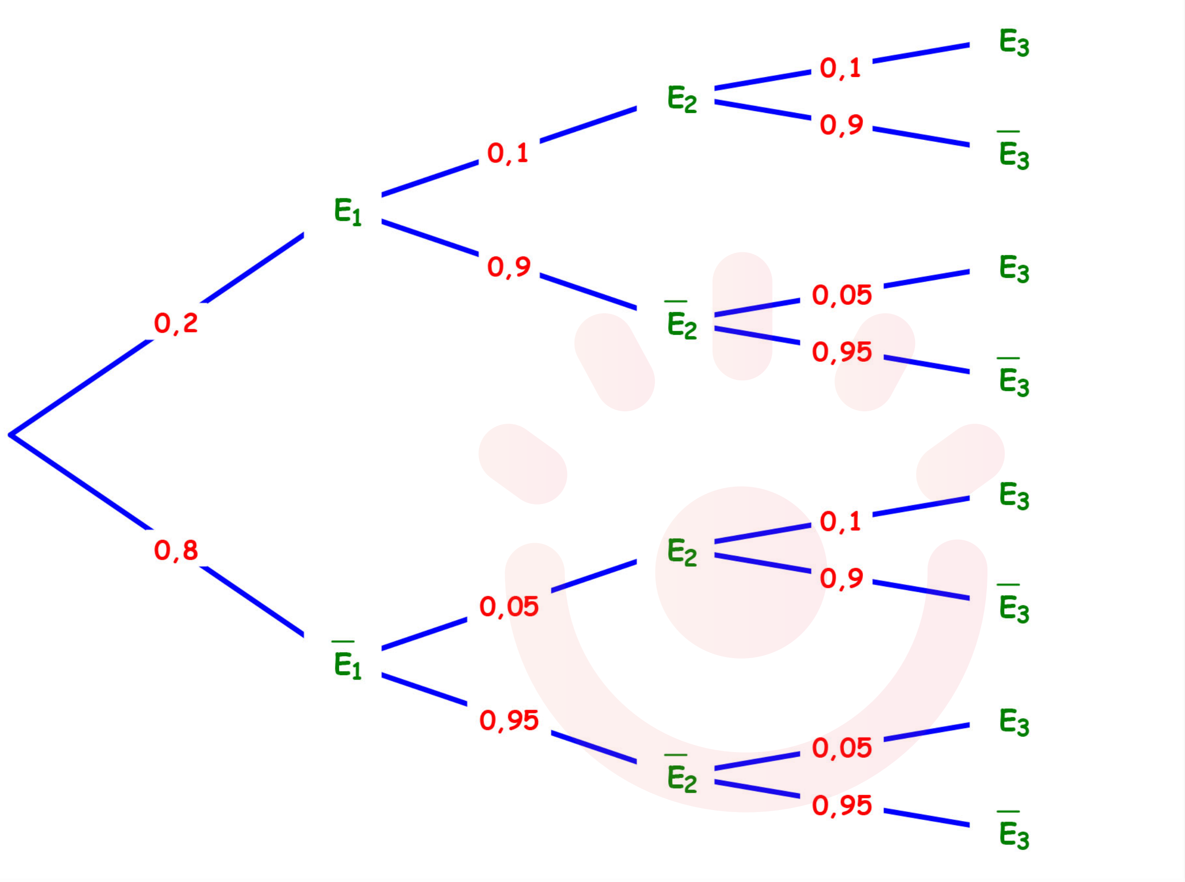
- أكتب معادلة للمماس (T) .

7) أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و أنشئ (Cf) و (Δ) و (T) .

الحل المفصل للاختبار الثاني – 3 تقني رياضي - 2017 / 2018

التمرين الاول : (05ن)

1) شجرة الاحتمالات:..(0.75ن)



2) أ) قيم X ....(0.5ن)

$X \in \{0;1;2;3\}$.

ب)نبين أن $p(X=2)=0.031$ ....(0.5ن)

$$p(X=2)=0.2\times0.1\times0.9+0.2\times0.9\times0.05+0.8\times0.05\times0.1$$
$$P(X=2)=0.018+0.009+0.004=0.031$$.

ج) تعين قانون احتمال X..(0.75ن)

X_i	0	1	2	3	مجموع
P_i	0.722	0.245	0.031	0.002	1
$X_i\times P_i$	0	0.245	0.062	0.006	0.313
$X_i^2\times P_i$	0	0.245	0.124	0.018	0.387

د) حساب الأمل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X ....(0.5+0.5ن)

$E(X^2)=0.387$ ، $E(X)=0.313$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.387-(0.313)^2=0.289031$$

3) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $p_{n+1}=0.05p_n+0.05$ ....(0.5ن)

لدينا: $p_{n+1}=p(E_{n+1})=p(E_{n+1}\cap E_n)+p(E_{n+1}\cap \overline{E_n})$.

اذن : $p_{n+1}=0.1\times p(E_n)+0.05p(\overline{E_n})$ أي

$$p_{n+1}=0.1\times p_n+0.05(1-p_n)=0.05p_n+0.05$$

وبالتالي نجد ، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $p_{n+1}=0.05p_n+0.05$.

4) أ) نبين أن (u_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول...........................(0.5ن)

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{1}{19}$$

$$u_{n+1}=0.05p_n+0.05-\frac{1}{19}$$

$$u_{n+1}=0.05p_n-\frac{0.05}{19} .$$

$$u_{n+1}=0.05\left(p_n-\frac{1}{19}\right)$$

$$u_{n+1}=0.05u_n$$

اذن (u_n)متتالية هندسية أساسها 0.05 وحدها الاول

$$u_1=p_1-\frac{1}{19}=p(E_1)-\frac{1}{19}=0.2-\frac{1}{19}=\frac{2.8}{19}=\frac{28}{190}=\frac{14}{95}$$

ب)استنتاج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n ثم p_n بدلالة n................(0.25+0.25ن)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=\frac{14}{95}(0.05)^{n-1}$

لدينا : $u_n=p_n-\frac{1}{19}$ وبالتالي $p_n=u_n+\frac{1}{19}$ أي $p_n=\frac{14}{95}(0.05)^{n-1}+\frac{1}{19}$.

ج)حساب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$...(0.25ن)

$$\lim_{n\to+\infty}p_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{14}{85}(0.05)^{n-1}+\frac{1}{19}\right]=\frac{1}{19} .$$

التمرين الثاني : (04ن)

تعين الاجابة الصحيحة الوحيدة من بين الاجابات المقترحة مع التعليل

1) الاجابة الصحيحة هي (أ)...(0.25ن)

التبرير : المعادلة $24x+34y=2$ تكافيء $12x+17y=1$ ....(0.75ن)

نبحث عن الحل الخاص نتبع الطريقة التالية :

$12x+17y=1$ تكافيء $1-12x=17y$ نبحث عن $(x;y)$ من Z^2

بحيث يكون $1-12x$ مضاعف للعدد 17.

نلاحظ من اجل $x=-7$ نجد : $1-12x=85=17\times 5$ و بالتالي نجد $y=5$.

اذن الثنائية $(-7;5)$ حل خاصا للمعادلة $12x+17y=1$.

وعليه : $\begin{cases}12x+17y=1\\12(-7)+17(5)=1\end{cases}$ بالطرح طرفا لطرف نجد : $12(x+7)+17(y-5)=0$ يعني

$12(x+7)=17(5-y)$. بما أن 12 يقسم العدد $12(x+7)$ فان 12 يقسم العدد $17(5-y)$ وبما أن العددان 12 و 17 أوليان فيما بينهما حسب مبرهنة غوص العدد 12 يقسم $(5-y)$ ، نضع $(5-y)=12k$ حيث k عدد صحيح أي $y=5-12k$ و k عدد صحيح .

بتعويض $y=5-12k$ في المعادلة $12x+17y=1$ نجد : $12x+17(5-12k)=1$ يعني $x=17k-7$

حلول المعادلة هي الثنائيات : $(17k-7;5-12k)$ مع $k\in Z$.

2) الاجابة الصحيحة هي (د) ....(0.25ن)

التبرير :..(0.75ن)

$[5]$	4	3	2	1	0	$x\equiv$
$[5]$	3	0	4	0	3	$x^2+x+3\equiv$

اذن : $x^2+x+3\equiv 0[5]$ يعني $x\equiv 1[5]$ أو $x\equiv 3[5]$.

3) الاجابة الصحيحة هي (أ) ....(0.25ن)

التبرير : ....(0.75ن)

لدينا : $2^{2018}\times 5^{2018}=(2\times 5)^{2018}=(10)^{2018}$.

عدد القواسم الطبيعية للعدد $(10)^{2018}$ هي : $(2018+1)(2018+1)=2019\times 2019=4076361$ أي 4076361

4) الاجابة الصحيحة هي (أ) ....(0.25ن)

التبرير :..(0.75ن)

$N=\overline{421}^5=1\times 5^0+2\times 5^1+4\times 5^2=1+10+100=111$

$N=18\times 6+3$

$N=3\times 6\times 6+3$.

$N=3\times 6^2+0\times 6^1+3\times 6^0$

$N=\overline{303}^6$

التمرين الثالث : (04نقط)

2)نبين أن J هي مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC . عين نصف قطرها..........(0.75ن)

$JA=|Z_A-Z_J|=|-3-i-i|=|-3-2i|=\sqrt{13}$.

$JB=|Z_B-Z_J|=|-2+4i-i|=|-2+3i|=\sqrt{13}$.

$JC=|Z_C-Z_J|=|3-i-i|=|3-2i|=\sqrt{13}$.

اذن J هي مركز الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC. حيث نصف قطرها $r=\sqrt{13}$.

3)كتابة على الشكل الجبري و الأسي العدد $\dfrac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$. ثم استنتاج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين.

$$\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=\frac{-2+4i-3+i}{-2+3+i}=\frac{-5+5i}{1+i}=\frac{5i(1+i)}{(1+i)}=5i=5e^{i\frac{\pi}{2}}$$ ....(0.25ن)

لدينا : $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ يعني $\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}$ يعني

المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين .... (0.25ن)

4) تعين Z_G لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC. ثم نعلم G

$$Z_G=\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}=\frac{-3-i-2+4i+3-i}{3}=\frac{-2+2i}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$ ....(0.25ن)

5) نبين أن النقط G ، J ، H على استقامة واحدة...(0.5ن)

نحسب $\arg\left(\frac{z_H-z_G}{z_H-z_j}\right)$.

اذن : $\left(\frac{z_H-z_G}{z_H-z_j}\right)=\frac{-2+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i}{-2-i}=\frac{1}{3}\left(\frac{-4-2i}{-2-i}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{2+i}{2+i}\right)=\frac{2}{3}\in\Re$.

وبالتالي : $\arg\left(\frac{z_H-z_G}{z_H-z_j}\right)=2k\pi$ مع k عدد صحيح

لدينا : $\arg\left(\frac{z_H-z_G}{z_H-z_j}\right)=2k\pi$ يعني $\left(\overrightarrow{JH};\overrightarrow{GH}\right)=2k\pi$ يعني أن النقط G ، J ، H على استقامة واحدة.

6) أ) تعين لاحقتي A' و K

$$Z_{A'}=\frac{Z_B+Z_C}{2}=\frac{-2+4i+3-i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$ ....(0.25ن)

$$Z_K=\frac{Z_H+Z_A}{2}=\frac{-2-3-i}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$ ....(0.25ن)

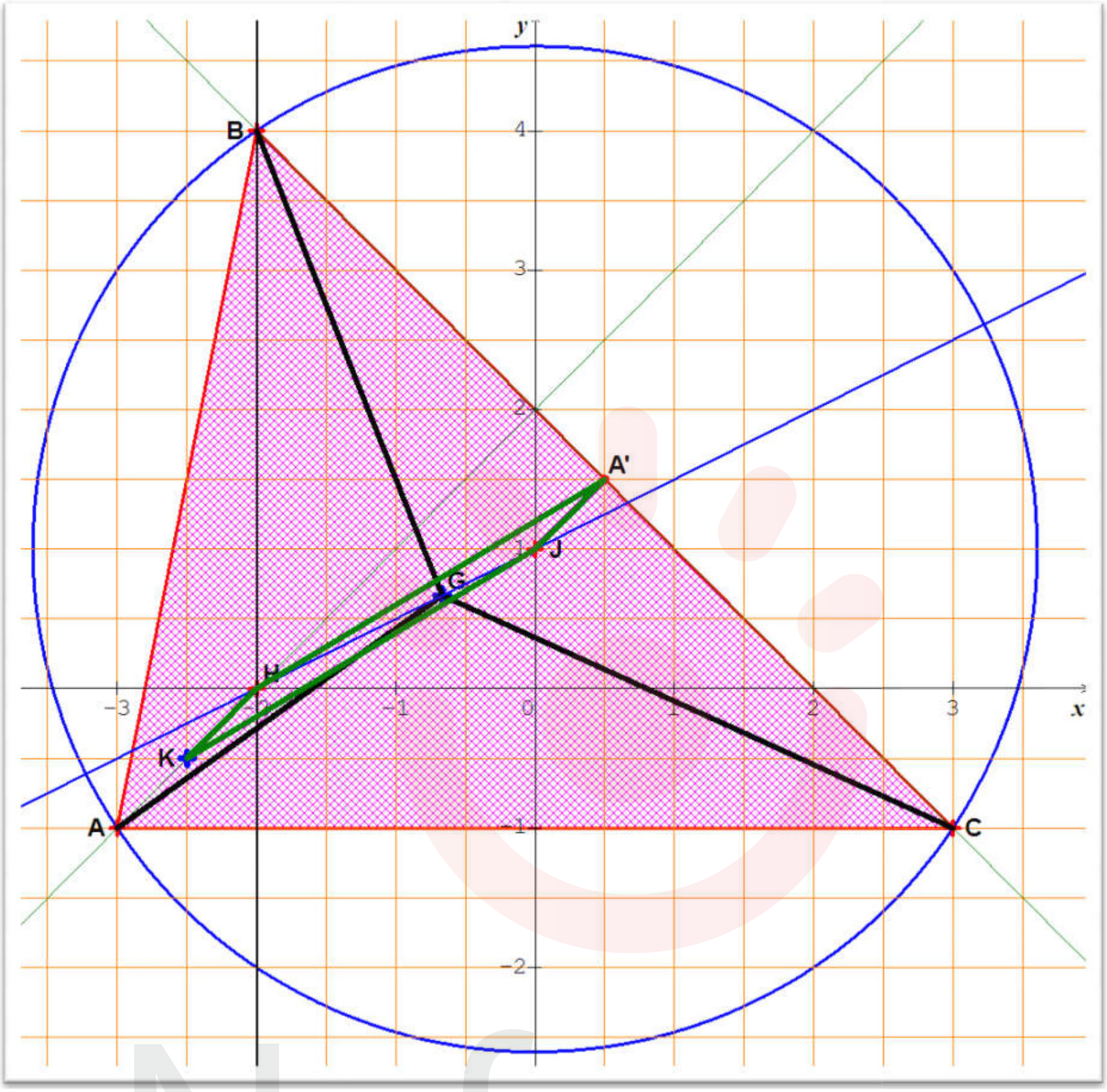
ب) نبين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع

الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع يعني $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{JA'}$ ....(0.5ن)

$Z_{\overrightarrow{KH}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $Z_{\overrightarrow{JA'}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

اذن $Z_{\overrightarrow{KH}}=Z_{\overrightarrow{JA'}}$ يعني $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{JA'}$ يعني الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع .

الرسم : ....(01ن)



التمرين الرابع :(07نقط)

الجزء الأول :

1) دراسة تغيرات g .

- النهايات : ....(0.25ن)

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1-xe^x-e^x\right]=1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

- اتجاه التغير : ....(0.5ن)

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\Re$: $g'(x)=-e^x-(x-1)e^x=-xe^x$.

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

- جدول التغيرات : ....(0.25ن)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	2	↘ $-\infty$

3) نبين أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α حيث: $1.278<\alpha<1.279$ استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

- الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالتي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1.278;1.279]$.
- $0\in]-\infty;0]$.
- $g(1.278)\approx 0.003$ و $g(1.279)\approx -0.002$ اذن $g(1.278)\times g(1.279)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α حيث: $1.278<\alpha<1.279$ ....(0.5ن)

- اشارة $g(x)$ حسب قيم x ....(0.25ن)

x	$-\infty$	&	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

الجزء الثاني :

1) حساب النهايات للدالة f عند $+\infty$ وَ $-\infty$ . ...(0.5ن)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-2)\left[\frac{x+2}{x-2}-e^{x}\right]=-\infty$$ و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2)\left[\frac{x+2}{x-2}-e^{x}\right]=-\infty$$.

2) نبين أن (Cf) له مستقيم مقارب (Δ) معادلة له: $y=x+2$ عند $-\infty$ ....(0.25ن)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to-\infty}\left[-(x-2)e^{x}\right]=0$$

- دراسة الوضعية: ....(0.5ن)

ندرس اشارة الفرق : $[f(x)-(x+2)]=\left[-(x-2)e^{x}\right]$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	$+$	0	$-$

- المنحنى (Cf) فوق (Δ) على المجال $]-\infty;2[$.
- المنحنى (Cf) تحت (Δ) على المجال $]2;+\infty[$.
- المنحنى (Cf) يقطع (Δ) في النقطة $A(2;4)$.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=g(x)$ ثم أدرس تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{R}$: $f'(x)=1-e^{x}-(x-2)e^{x}=1-(x-1)e^{x}=g(x)$.

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ ....(0.25ن)

اذن حسب الجزء الأول ، الدالة f متناقصة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$

ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ .... **(0.25ن)**

جدول التغيرات : .... **(0.25ن)**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4) نبين أن: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$ ثم استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ . ... **(0.5ن)**

لدينا : $f(\alpha)=\alpha+2-(\alpha-2)e^{\alpha}$ ومن جهة أخرى نجد $g(\alpha)=1-(\alpha-1)e^{\alpha}=0$ يعني

$e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ وبالتالي نعوض نجد :

$$f(\alpha)=\alpha+2-(\alpha-2)e^{\alpha}=\alpha+2-\frac{\alpha-2}{\alpha-1}=\frac{\alpha^2-\alpha+2\alpha-2-\alpha+2}{\alpha-1}=\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\ .$$

- استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .... **(0.5ن)**

لدينا : $1.278<\alpha<1.279$ اذن $1.633<\alpha^2<1.635.....(1)$.

ومن جهة اخرى : $1.278<\alpha<1.279$ اذن $0.278<\alpha-1<0.279$ اذن

$$3.584<\frac{1}{\alpha-1}<3.597.......(2)\ .$$

من (1) و (2) نجد : $5.852<\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}<50881$ أي $5.852<f(\alpha)<5.881$.

5) استنتاج من الجزء I) إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (Cf)

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\Re$: $f''(x)=g'(x)$ . ... **(0.25ن)**

اشارة $f''(x)$ من اشارة $g'(x)$ وحسب الجزء الأول نجد :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

6) تعين النقطة A من (Cf) التي يكون عندها المماس (T) للمنحنى (Cf) موازيا للمستقيم (Δ).

نحل المعادلة $f'(x_0)=1$ يعني $g(x_0)=1$ يعني $1-(x_0-1)e^{x_0}=1$ يعني $(x_0-1)e^{x_0}=0$

يعني $x_0=1$ . ... **(0.25ن)**

كتابة معادلة المماس (T) . ... **(0.5ن)**

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$(T): y=1(x-1)+2-e$.

$(T): y=x+1-e$

7) حساب $f(2)$ و $f(3)$ و أنشاء (Cf) و (Δ) و (T) ....(0.25ن+01ن)

$f(2)=4$ و $f(3)=5-e^3$.